



TITLE:

量子力学とBoole値解析学(基研短期研究会「進化の力学への場の理論的アプローチ」報告,研究会報告)

AUTHOR(S):

小澤, 正直

CITATION:

小澤, 正直. 量子力学とBoole値解析学(基研短期研究会「進化の力学への場の理論的アプローチ」報告,研究会報告). 物性研究 1987, 47(5): 534-536

ISSUE DATE:

1987-02-20

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/92400>

RIGHT:

研究会報告

られたことの他は、まだ手が着けられていないように思います。この点も、興味をもつ方の今後の研究に待つところが多いように思います。

文 献

- 。「量子力学における観測の理論」 柳瀬, 並木, 町田編 新編物理学選集 69, 日本物理学会, 昭和 53.
- 。 *Quantum Theory and Measurement*. ed. J. H. Wheeler and W. H. Zurek, Princeton Series in Physics. Princeton University Press. 1983.
- 。「現代の物理学と新しい世界像」 柳瀬睦男著, 岩波現代選書, Ⅲ, 1986.

量子力学と Boole 値解析学

名大・教養 小 澤 正 直

通常、数学の命題は真か偽かの二値論理によって解釈される。最近の数学基礎論の成果によれば、そのような数学の推論法則を変えずに、連続無限個の中間的真理値をもつ Boole 値論理によって、集合論を解釈することが可能である。現在の数学、特に解析学は、集合論によって、その概念構成が基礎付けられているから、このような Boole 値論理によって解釈される集合論を展開することにより、Boole 値論理に基づく数学が展開されることになる。今日、このような方法の解析学への応用は、Boole 値解析学と呼ばれている。

量子力学の観測問題に関連して、町田・並木両氏は、測定される対象と測定装置の合成系の量子力学的記述に、荒木氏によって提唱された連続超選択則を適用することにより、合成系の波束の収縮を説明するモデルを提案した。柳瀬氏は、この理論（以下、MNA 理論と呼ぶ）が、例えば、装置に含まれる粒子数を不定にしたまま量子力学的状態記述を可能にするなどの、物理系の概念規定の曖昧性を実現していることに着目して、ファジー論理に基づく、理論の認識論的基礎付けを論じている。

竹内、千谷両氏の研究によれば、現行のファジー集合論は、直観主義論理に基づく集合論の一種と考えられる。そこで、柳瀬氏の構想に従って、直観主義論理に基づく量子力学を展開することにより、MNA 理論の認識論的基礎付けが得られることが期待される。しかし、このプログラムには、一つの技術的困難が含まれている。

ファジー集合論、又は、一般的な直観主義論理の推論法則では、排中律が成立しない。従って、この直観主義論理に基づく数学を展開するためには、古典論理の推論法則に基づく数学を一度放棄して、新たに弱い推論法則に基いて、数学を再構成する必要がある。勿論、これは、古くはブラウアーの主張したプログラムであると共に、直観主義集合論と層の理論やトポスの理論と関連した大変興味深いテーマである。しかし、MNA 理論の認識論的基礎付けという我々の目的に比較して、その技術的困難が支払うべき正当な代

償であるか否かは一考を要する問題である。

問題点は、概念規定の曖昧な対象を数学的に記述するためには排中律を放棄することが当然かということである。確かに、通常の二値論理の解釈の下で量子力学の処方箋に従う限り、MNA 理論で説明されるような波束の収縮が得られないことは、Wigner-Fine の定理等の no-go 定理によって示唆されている。そこで、処方箋ないしは枠組の拡張が何らかの形で必要となり、連続超選択則という方法が成功したと考えられる。我々の目的は、このような枠組の拡張が、何か我々の自然記述のための認識論的前提の変更によって、自然な形で得られないかということであり、柳瀬氏の構想は、それが論理の変更に相当するということである。

さて、論理を二値論理と多値論理に分ければ、排中律の成立しない直観主義論理はすべて多値論理である。一方で、Boole 値論理は、排中律を含むすべての古典論理の推論を許す多値論理であり、Boole 値論理に基く集合論は、通常の集合論の公理をすべて満足する体系である。本稿の目的は、この Boole 値集合論を用いることにより、排中律を犠牲にすることなしに、概念規定の曖昧な対象の厳密な数学的記述が達成されることを示すことである。

排中律を犠牲にしないことの利点は、Boole 値論理に基く数学の定理が、通常の数学の定理から一定の翻訳原理に基いて得られるので、新たに特別な数学を展開するという困難から免れることである。

\mathcal{B} を実数体 \mathbf{R} の Boole 集合の全体、 μ を \mathbf{R} 上の絶対連続な測度とし、 B を \mathcal{B} の μ に関する測度代数、即ち、 \mathcal{B} の測度 μ による同値類の全体とする。このとき、 B は完備 Boole 代数となる。 B を真理値の全体とする論理を B 値論理と呼ぶ。 B の最大元 I は“真”を、最小元 0 は“偽”を表わす。 0 でも I でもない B の元は中間的な真理値を表わす。 B 値論理に基く数学は、数学の命題を Scott-Solovay の B 値普遍類 $V^{(B)}$ によって解釈することにより得られる。ここで、 $V^{(B)}$ は B 値論理に基く集合（帰属関数が B に値をとるファジー集合の一種と考えられる）の全体で、数学の概念構成に従って、同時に、 B 値論理に従う数学の対象の全体と考えられる。（つまり、ある意味で $V^{(B)}$ は、 B 値論理の下で記述される概念規定の曖昧な数学的对象の全体と考えられ、 B 値論理に基く数学とは、このような数学的对象の性質や関係を通常の数学の概念構成になぞられた用語で述べたものと考えられる。）

我々のプログラムは、 $V^{(B)}$ に基く数学、特に、実数論と Hilbert 空間論を展開し、更に、その数学を用いて、 B 値論理に基く量子力学を展開することである。ここでは、理論は全く言語的なものと考えられ、“実数”、“Hilbert 空間”、“観測量”等の言葉が $V^{(B)}$ で解釈された時に、どのような構造をもつのか、通常の数学における対象を用いて表現される。この時、前述のように、ある命題 φ が通常の数学の定理であれば、その命題 φ を $V^{(B)}$ で解釈した時も真である。このことは、 $V^{(B)}$ に基く数学がどのようなものを調べる仕事を大変容易にする。但し、同じ数学用語でも、通常の数学で解釈した場合と $V^{(B)}$ で解釈した場合では異なる構造をもつ対象を指示することになる。このようにして、量子力学の基本命題も、それを $V^{(B)}$ で解釈することにより、新しい意味をもつことになる。以下では、 $V^{(B)}$ で解釈された量子力学を B 値量子力学と呼ぶ。明らかに、 B 値量子力学は、 B 値論理の下で記述される概念規定の曖昧な対象に、現在の量子力学の処方箋を言葉通りに当てはめた量子力学と考えられる。

さて、このプログラムの詳細は、拙著「量子力学的観測と Boole 値解析学」（『科学基礎論研究』67号、

1986年12月)に譲ることとして、B値量子力学の意味するところと連続超選択則を適用した量子力学の基本概念の比較を表にすると以下のようになる。

	B 値量子力学	量子力学+連続超選択則
状態空間	$\mathcal{K} = \int^{\oplus} \mathcal{K}(\lambda) \mu(d\lambda)$	同 左
観測量	$A = \int^{\oplus} A(\lambda) \mu(d\lambda)$	同 左
状態	$\rho = \int^{\oplus} \rho(\lambda) \mu(d\lambda)$	$\rho = \int^{\oplus} f(\lambda) \rho(\lambda) \mu(d\lambda)$
期待値	$\text{Tr}[A(\lambda) \rho(\lambda)]_{\lambda}$	$\int \text{Tr}[A(\lambda) \rho(\lambda)] f(\lambda) \mu(d\lambda)$
時間発展	$\rho_t(\lambda) = e^{-itH(\lambda)} \rho(\lambda) e^{itH(\lambda)}$	同 左
スカラー量	$a = \int^{\oplus} a(\lambda) I \mu(d\lambda)$	$a I (a: \text{実数})$
巨視的物理量	同 上	同 左

(但し、 $\{A(\lambda)\}$ 、 $\{H(\lambda)\}$ は自己共役作用素の族、 $\{\rho(\lambda)\}$ は密度作用素の族、 $f(\lambda)$ は密度関数、 $a(\lambda)$ は実数値可測関数を表わす。)

この表は、量子力学のB値論理化が、量子力学に連続超選択則を加えた理論と大変よく似ていることを示している。この対応は“状態空間”、“観測量”、及び“時間発展”について完全であるが、“状態”及び“期待値”については完全でない。また、B値量子力学では“スカラー量”であるものが、連続超選択則によって導入された“巨視的物理量”に対応している。これらのことは、確率密度 $f(\lambda)$ 及び、その平均操作が理論のBoole 値論理化に含まれない新しい理論的要素であることを示している。

ところで、 V^{\oplus} の構文論から、通常定理を上表の翻訳規則に従って翻訳したものは再び新しい定理になるので、このことを利用して、従来の量子力学の定理を連続超選択則をみたす量子力学系に対する定理に翻訳できる。例えば、観測に伴う合成系のユニタリ変換では、干渉項の消滅が起こらないとする Wigner-Fine の定理は、B値量子力学に対して翻訳されて定理となる。しかし、翻訳規則は期待値の計算に関して、連続超選択則の理論に対しては完全な対応を与えていないから、こちらの理論に関しては、この no-go 定理を免れる可能性が残る。MNA 理論がこの no-go 定理を免れている理由は、量子力学のB値解釈に含まれていない、新しい理論的要素である確率密度 $f(\lambda)$ による平均操作とそれに伴う Riemann-Lebesgue の定理の成立によると述べることができよう。つまり、柳瀬氏の構想に従って、論理の多値論理化を実行した時に、自然に得られるものがB値量子力学であり、MNA 理論は、それを更に $f(\lambda)$ による平均操作がつけ加わっていると結論される。

このようにして、Boole 値論理による量子力学の拡張は、MNA 理論の認識論的基礎を理論の多値論理化という観点から明らかにするだけでなく、理論の構文論的側面を明らかにする上でも有効な道具と考えることができる。我々の経験を記述する一般論的方法論の観点からも、理論の多値論理化をこのように Boole 値解析を利用して、いわば自動的に実現させることは、実りの多い方法であると思われる。